

Multimedia Retrieval im WS 2011/2012

4. Feature-Transformationsverfahren

4.3 Karhunen-Loeve-Transformation

Prof. Dr.-Ing. Marcin Grzegorzek
Juniorprofessur für Mustererkennung
Institut für Bildinformatik im Department ETI
Fakultät IV der Universität Siegen

21. November 2011



Inhalte und Termine

1. Einführung

1.1 Grundlegende Begriffe

1.2 Suche in einem MMDBS

1.3 MMDBMS-Anwendungen

11.10.2011

2. Prinzipien des Information Retrieval

2.1 Einführung

2.2 Information-Retrieval-Modelle

2.3 Relevance Feedback

2.4 Bewertung von Retrieval-Systemen

17.10.2011

2.5 Nutzerprofile

3. Prinzipien des Multimedia Retrieval

3.1 Besonderheiten der Verwaltung und des Retrievals

3.2 Ablauf des Multimedia-Information-Retrievals

3.3 Daten eines Multimedia-Retrieval-Systems 24.10.2011

3.4 Feature

3.5 Eignung verschiedener Retrieval-Modelle

3.6 Multimedia-Ähnlichkeitsmodell 25.10.2011

4. Feature-Transformationsverfahren

4.1 Diskrete Fourier-Transformation 08.11.2011

4.2 Diskrete Wavelet-Transformation 14.11.2011

4.3 Karhunen-Loeve-Transformation 21.11.2011

4.4 Latent Semantic Indexing und Singulärwertzerlegung

5. Distanzfunktionen

- 5.1 Eigenschaften und Klassifikation
- 5.2 Distanzfunktionen auf Punkten
- 5.3 Distanzfunktionen auf Binärdaten
- 5.4 Distanzfunktionen auf Sequenzen
- 5.5 Distanzfunktionen auf allgemeinen Mengen

6. Ähnlichkeitsmaße

- 6.1 Einführung
- 6.2 Distanz versus Ähnlichkeit
- 6.3 Grenzen von Ähnlichkeitsmaßen
- 6.4 Konkrete Ähnlichkeitsmaße
- 6.5 Aggregation von Ähnlichkeitswerten
- 6.6 Umwandlung von Distanzen in Ähnlichkeitswerte und Normierung
- 6.7 Partielle Ähnlichkeit

7. Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

7.1 Hochdimensionale Indexstrukturen

7.2 Algorithmen zur Aggregation von Ähnlichkeitswerten

8. Anfragebehandlung

8.1 Einführung

8.2 Konzepte der Anfragebehandlung

8.3 Datenbankmodell

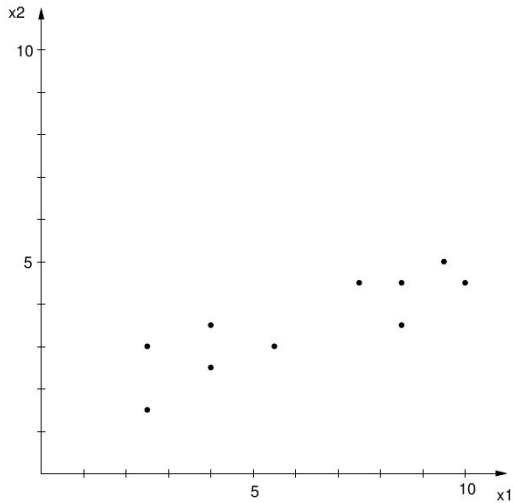
8.4 Sprachen

9. Zusammenfassung

KLT - Allgemeines

- Minimalität und Orthogonalität **innerhalb eines** Medienobjekts (Fourier- & Wavelet-Transformation)
- Karhunen-Loeve-Transformation (KLT) für Minimalität und Orthogonalität bzgl. **mehrerer** Medienobjekten
- Analyse der Verteilungen der Feature-Werte **mehrerer** Medienobjekte
- Erkennung linearer Abhängigkeiten anhand erkannter *Achsen*
- andere Bezeichnung für KLT: **Hauptachsentransformation** (HAT), **principal component analysis** (PCA)

KLT - Lineare Abhängigkeit



KLT - Lineare Abhängigkeit und Minimalität

- lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz
 - Verletzung der Forderung nach Minimalität
- Problem: Achsen oft **nicht achsenparallel** im Feature-Raum
- Idee der KLT: **Verschiebung** und **Rotation** des Feature-Raums
 - Achsen entsprechen Feature-Dimensionen
 - Erwartungswert ist Koordinatenursprung
- Entfernen von Achsen mit geringer Streuung

KLT - Erstellen der Kovarianzmatrix

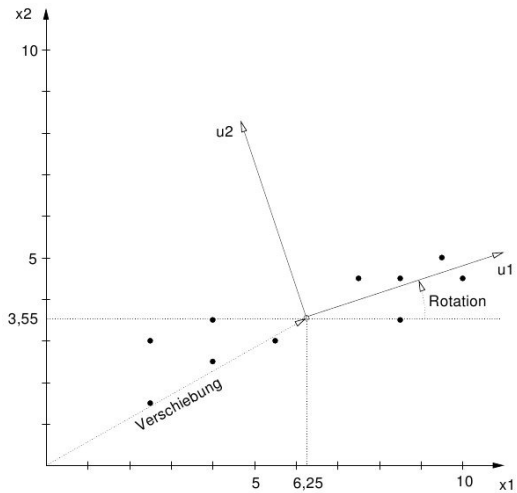
- Berechnung **Kovarianzmatrix** aus m -dimensionalen Feature-Vektoren
- $m \times m$ -Kovarianzmatrix $\{S_{kl}^2\}$: Kovarianz zwischen Dimensionen k und l :
 - $0 \rightarrow$ keine lineare Abhängigkeit
 - $> 0 \rightarrow$ positive lineare Abhängigkeit
 - $< 0 \rightarrow$ negative lineare Abhängigkeit
- Diagonalewerte entsprechen Varianzwerten einzelner Dimensionen
- Kovarianzmatrix ist symmetrisch
 \rightarrow **Zerlegung in $U * L * U^T$** durch Lösen von Eigenwertproblem

KLT - Zerlegung

$$\text{Kovarianzmatrix} = U * L * U^T$$

- U enthält orthonormale Eigenvektoren (Achsen)
→ Transformation in Eigenraum
- U^T entspricht Rücktransformation
- L ist Diagonalmatrix: Diagonalewerte sind Eigenwerte/Varianzwerte
→ achsenparallele Skalierung im Eigenraum

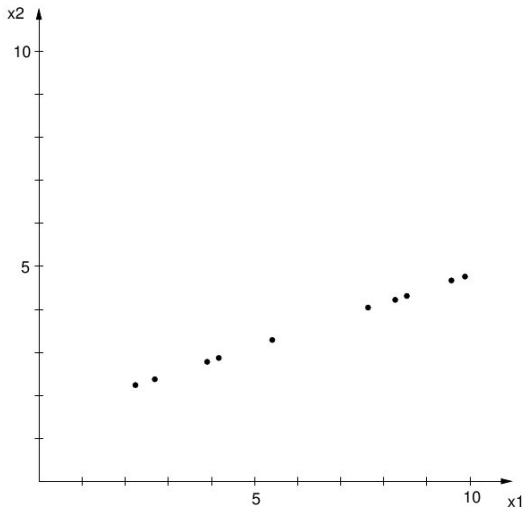
KLT - Zerlegung



KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten

- Transformation der Feature-Vektoren erzeugt achsenparallele Abhängigkeitsachsen
(Translation um negierten Mittelwertsvektor und Multiplikation mit U^T)
- Sortieren der Achsen nach Varianzwert
- Entfernen von Achsen mit geringer Varianz (unterhalb best. Schwellwert)
- Rücktransformation bedeutet Entfernen linearer Abhängigkeiten
(Multiplikation mit U und Translation um Mittelwertsvektor)
- Reduktionsfehler abhängig von Eigenwerten der entfernten Achsen \rightarrow Distanzen bleiben weitgehend erhalten

KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten



KLT - Bewertung

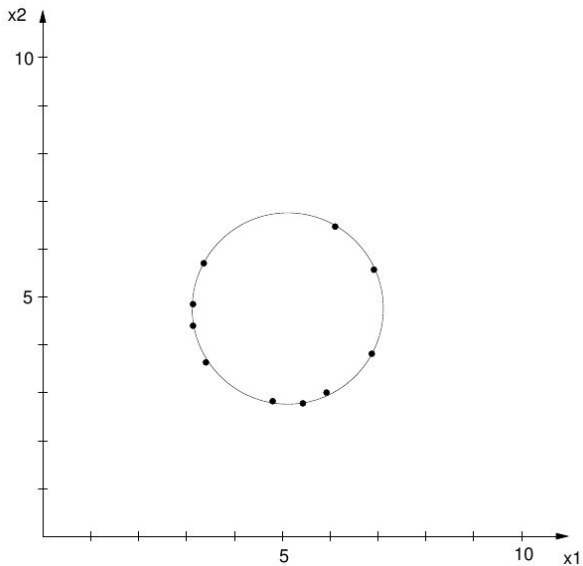
Vorteile der KLT

- 1** Orthogonalisierung:
 - lineare Abhängigkeiten werden entfernt
 - Werte der Achsendimensionen (inhärente Feature-Dimension) isoliert manipulierbar
 - Trennung wesentlicher von unwesentlichen Dimensionen möglich
- 2** Minimierung: Entfernen unnötiger Dimensionen im Eigenraum
 - minimaler Reduktionsfehler
- 3** Invarianzen: isolierte Analyse von linear wirkenden Invarianzen möglich

Probleme der KLT

- Berechnung auf **Menge** von Feature-Vektoren
 - Problem bei dynamischer Menge
 - Lösungsansatz: Verwendung statischer repräsentativer Untermenge
- nicht-lineare Abhängigkeiten nicht erkennbar
- orthogonale Achsen: nicht immer erwünscht
Ausweg: ICA (independent component analysis)

KLT - Nicht-Lineare Abhängigkeiten



KLT - Berechnung

- Ausgangspunkt ist Menge von n m -dimensionalen Feature-Vektoren

→ $m \times n$ -Feature-Matrix $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Beispiel:

$$F = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,5 & 4 & 4 & 5,5 & 7,5 & 8,5 & 8,5 & 9,5 & 10 \\ 1,5 & 3 & 3,5 & 2,5 & 3 & 4,5 & 4,5 & 3,5 & 5 & 4,5 \end{pmatrix}$$

- Mittelwertvektor: $\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$ mit $\bar{f}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$

- Beispiel: $\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 3,55 \end{pmatrix}$

KLT - Berechnung

- Kovarianzmatrix: $S^2 = \{s_{kl}^2\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$s_{kl}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_{ki} - \bar{f}_{k*})(f_{li} - \bar{f}_{l*})$$

- Beispiel: $S^2 = \begin{pmatrix} 8,3472 & 2,6806 \\ 2,6806 & 1,1917 \end{pmatrix}$

KLT - Zerlegung der Kovarianzmatrix

da symmetrisch, Zerlegung anhand Eigenvektoren möglich:

$$S^2 = U * L * U^T$$

- L enthält Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$
- U ist orthonormal und Spaltenvektoren entsprechen den Achsen
- Durchführung Permutation der drei Matrizen, damit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ gilt
- Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9488 & -0,316 \\ 0,316 & 0,9488 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 9,24 & 0 \\ 0 & 0,2989 \end{pmatrix}$$

KLT - Transformation in den Achsenraum

Transformation von Feature-Vektor f_{*j}

$$\blacksquare f'_{*j} = U^T * \begin{pmatrix} f_{1j} - \bar{f}_{1*} \\ f_{2j} - \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ f_{mj} - \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

■ Beispiel: $F' =$

$$\begin{pmatrix} -4,2 & -3,7 & -2,1 & -2,5 & -0,9 & 1,5 & 2,4 & 2,1 & 3,5 & 3,8 \\ -0,8 & 0,7 & 0,7 & -0,3 & -0,3 & 0,5 & 0,2 & -0,7 & 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$$

KLT - Rücktransformation

$$f_{*j} = U * f'_{*j} + \begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

KLT - Entfernen von Dimensionen

- Entfernen von Achsendimensionen mit geringer Varianz
- Abschätzung über Anteil an Gesamtvarianz: $\text{Anteil}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j}$
- Beispiel: 1. Achse hat 97 Prozent und zweite Achse 3 Prozent
→ Weglassen der zweiten Achsendimension
- f''_{*j} sei Ergebnis der Reduktion von f'_{*j}
- Rücktransformation von f''_{*j} erzeugt $\tilde{f}_{*j} \neq f_{*j}$

KLT - Rekonstruktionsfehler aufgrund Reduktion

Erhalt nur der p ersten Achsendimensionen

- Erwartungswert des quadrierten Fehlers:

$$R^2 = E\{\|\tilde{f}_{*j} - f_{*j}\|^2\}$$

- es gilt: $R^2 = \sum_{i=p+1}^m \lambda_i$