Multimedia Retrieval im WS 2011/2012

4. Feature-Transformationsverfahren

4.4 LSI und Singulärwertzerlegung

Prof. Dr.-Ing. Marcin Grzegorzek
Juniorprofessur für Mustererkennung
Institut für Bildinformatik im Department ETI
Fakultät IV der Universität Siegen

22. November 2011

Inhalte und Termine

1. Einführung

1.1 Grundlegende Begriffe

1.2 Suche in einem MMDBS

1.3 MMDBMS-Anwendungen 11.10.2011

2. Prinzipien des Information Retrieval

2.1 Einführung

2.2 Information-Retrieval-Modelle

2.3 Relevance Feedback

2.4 Bewertung von Retrieval-Systemen 17.10.2011

2.5 Nutzerprofile

Inhalte und Termine

3. Prinzipien des Multimedia Retrieval

3.1 Besonderheiten der Verwaltung und des Retrievals	
3.2 Ablauf des Multimedia-Information-Retrievals	
3.3 Daten eines Multimedia-Retrieval-Systems	24.10.2011
3.4 Feature	
3.5 Eignung verschiedener Retrieval-Modelle	
3.6 Multimedia-Ähnlichkeitsmodell	25.10.2011

4. Feature-Transformationsverfahren

4.1 Diskrete Fourier-Transformation	08.11.2011
4.2 Diskrete Wavelet-Transformation	14.11.2011
4.3 Karhunen-Loeve-Transformation	21.11.2011
4.4 Latent Semantic Indexing und Singulärwertzerlegung	22.11.2011

Inhalte und Termine

5. Distanzfunktionen

5.1 Eigenschaften und Klassifikation

5.2 Distanzfunktionen auf Punkten

5.3 Distanzfunktionen auf Binärdaten

5.4 Distanzfunktionen auf Sequenzen

5.5 Distanzfunktionen auf allgemeinen Mengen

6. Ähnlichkeitsmaße

6.1 Einführung

6.2 Distanz versus Ähnlichkeit

6.3 Grenzen von Ähnlichkeitsmaßen

6.4 Konkrete Ähnlichkeitsmaße

6.5 Aggregation von Ähnlichkeitswerten

6.6 Umwandlung von Distanzen in Ähnlichkeitswerte und Normierung

6.7 Partielle Ähnlichkeit

Inhalte und Termine

7. Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

7.1 Hochdimensionale Indexstrukturen

7.2 Algorithmen zur Aggregation von Ähnlichkeitswerten

8. Anfragebehandlung

8.1 Einführung

8.2 Konzepte der Anfragebehandlung

8.3 Datenbankmodell

8.4 Sprachen

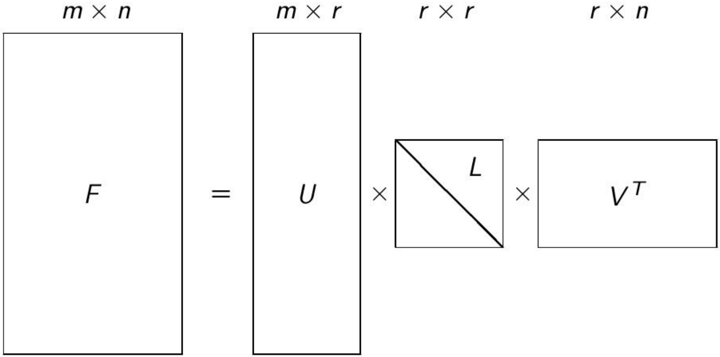
9. Zusammenfassung

LSI - Allgemeines

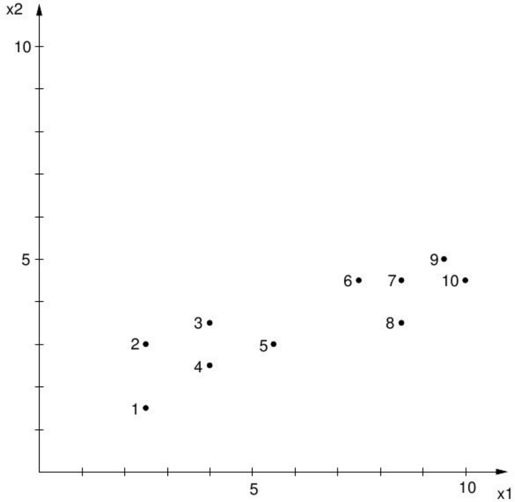
- ähnlich zur KLT: Erkennung und Entfernen linearer Abhängigkeiten durch Lösen von Eigenwertproblem
- allerdings Zerlegung der Feature-Matrix $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Zerlegung von F in $U * L * V^T$
  - Matrizen U, V enthalten orthonormale Spaltenvektoren
  - Matrix L ist Diagonalmatrix
  - reduzierte, zerlegte Matrizen bedeuten Speichereinsparung
- Zerlegung entspricht Abbildung auf minimale, „schlummernde“ (latente), künstliche Konzepte

LSI - Zerlegung der Feature-Matrix

$r \leq \min(m, n)$ entspricht dem Rang der Matrix F

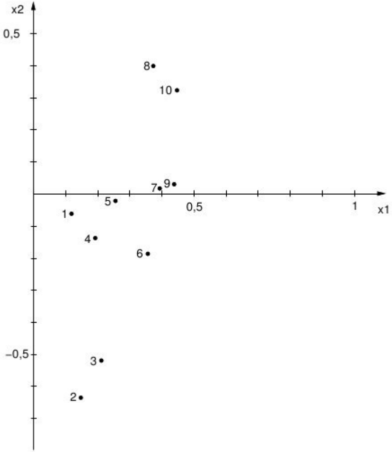


LSI - Beispiel



LSI - Beispiel

Vektoren in Matrix V^T:

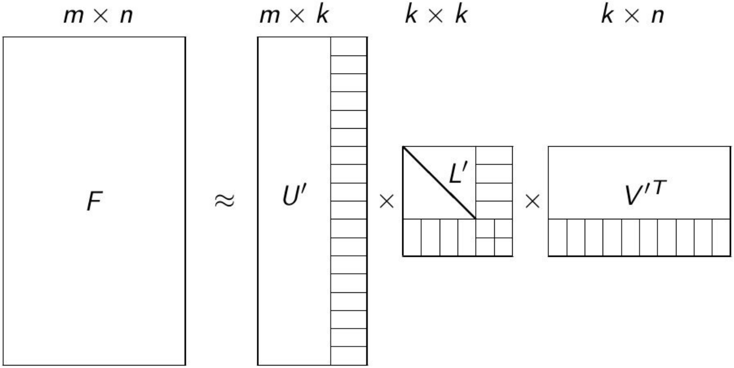


LSI - Analyse der Matrix **L**

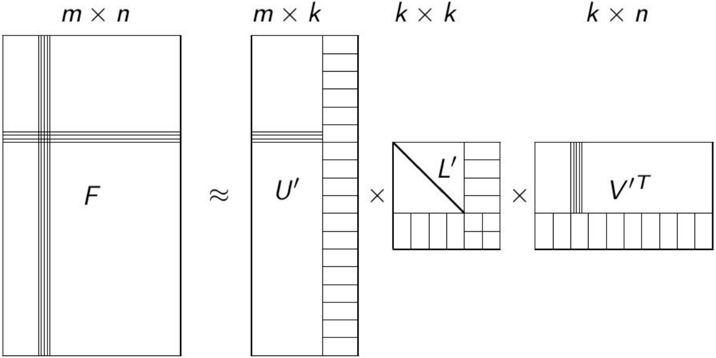
Diagonalwerte der Matrix L

- geben Relevanz der einzelnen Konzepte an
  $\longrightarrow$ niedrige Werte entsprechen geringer Relevanz und umgekehrt
- absteigende Sortierung der Diagonalelemente durch geschicktes Tauschen der Spalten/Zeilen
- Dimensionreduzierung: Entfernen der Konzepte mit den kleinsten Diagonalwerten
  $\longrightarrow$ minimierter Approximationsfehler
- reduzierte Matrizen bedeuten häufig reduzierten Speicheraufwand

LSI - Dimensionsreduzierung graphisch



LSI - Korrespondenz von Spalten und Zeilen



LSI - Ähnlichkeitsvergleiche

Ähnlichkeitsberechnung auf der Basis der 3 Matrizen

- Vergleich von Feature-Vektoren:
  - Skalarprodukt auf Matrizen V'^T und L berechenbar
  - daher Kosinusmaß und euklidsche Distanz leicht berechenbar
- Vergleich der Dimensionen
  - Skalarprodukt auf Matrizen U' und L berechenbar
    $\longrightarrow$ z.B. zur Synonymerkennung in Texten
  - Skalarprodukt ähnlich der Kovarianz zweier Dimensionen

LSI - Dynamische Feature-Matrix

- ständige Neuberechnung der Zerlegung ist zu aufwändig
- Lösungsansatz: Zerlegung einer repräsentativen, statischen Untermenge der Feature-Vektoren
- neue Feature-Vektoren werden dann mit U' und L' multipliziert

LSI - Bewertung

- Bewertung ähnlich zur KLT
- Hauptunterschiede:
  - Zerlegung der Feature-Matrix an Stelle der Kovarianzmatrix
  - Speichern und Manipulieren der zerlegten Matrizen an Stelle Rücktransformation nach Reduktion

LSI - Berechnung

- Ausgangsbasis ist $m \times n$-Feature-Matrix $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ für n Feature-Vektoren
- Spalte f_{*j} entspricht Feature-Vektor mit m Werten

LSI - Beispiel

- Beispiel 2×10-Feature-Matrix:

$$F = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 & 4 & 4 & 5{,}5 & 7{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & 9{,}5 & 10 \\ 1{,}5 & 3 & 3{,}5 & 2{,}5 & 3 & 4{,}5 & 4{,}5 & 3{,}5 & 5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$$

- Erzeugung einer dritter Dimensionen durch Summierung der ersten beiden plus 0,5:

$$F = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 & 4 & 4 & 5{,}5 & 7{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & 9{,}5 & 10 \\ 1{,}5 & 3 & 3{,}5 & 2{,}5 & 3 & 4{,}5 & 4{,}5 & 3{,}5 & 5 & 4{,}5 \\ 4{,}5 & 6 & 8 & 7 & 9 & 12{,}5 & 13{,}5 & 12{,}5 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

SVD - Allgemeines

$F = U * L * V^T$

- U ist spaltenorthonormale $m \times r$-Matrix
- L ist $r \times r$-Diagonalmatrix
- V^T ist zeilenorthonormale $r \times n$-Matrix
- r ist Rang der Matrix F

SVD - Allgemeines

Berechnung durch Ausnutzung folgender Gesetze

$$\begin{aligned} F * F^T &= U * L * V^T * (U * L * V^T)^T \\ &= U * L * V^T * V * L * U^T \\ &= U * L^2 * U^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^T * F &= (U * L * V^T)^T * U * L * V^T \\ &= V * L * U^T * U * L * V^T \\ &= V * L^2 * V^T \end{aligned}$$

SVD - Beispiel

$$U = \begin{pmatrix} 0{,}5084 & 0{,}6794 & -0{,}5291 \\ 0{,}2732 & -0{,}7099 & -0{,}6491 \\ 0{,}8166 & -0{,}1855 & 0{,}5465 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 42{,}3264 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}4346 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2295 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0{,}1265 & -0{,}0825 & 0{,}7104 \\ 0{,}1652 & -0{,}6341 & 0{,}0397 \\ 0{,}2250 & -0{,}5136 & -0{,}0697 \\ 0{,}1992 & -0{,}1459 & 0{,}3774 \\ 0{,}2591 & -0{,}0254 & 0{,}2680 \\ 0{,}3603 & -0{,}1712 & -0{,}2505 \\ 0{,}3916 & 0{,}0317 & -0{,}1744 \\ 0{,}3659 & 0{,}3995 & 0{,}2728 \\ 0{,}4358 & 0{,}0507 & -0{,}3218 \\ 0{,}4386 & 0{,}3361 & -0{,}0602 \end{pmatrix}$$

SVD - Reduzierung der Matrizen

- Zeilen-/Spaltentausch damit Diagonalwerte von L absteigen
- Reduzieren heißt Streichen entspr. U, V-Spalten
  $\longrightarrow U', L'$ und V'
- Approximationsfehler ist abhängig von entfernten Diagonalwerten
- Matrizenprodukt in dyadischer Schreibweise:

$$F = l_1(u_1 * v_1^T) + l_2(u_2 * v_2^T) + \ldots + l_r(u_r * v_r^T)$$

SVD - Reduzierung der Matrizen

Beispiel

$$L = \begin{pmatrix} 42{,}3264 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}4346 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2295 \end{pmatrix}$$

- Wert 0,2295 im Vergleich zu anderen Werten verschwindend klein
- dritte Dimension wurde künstlich erzeugt
- Reduzierung der dritten Dimension

SVD - Transformation neuer Feature-Vektoren

- Annahme: Zerlegung erfolgte auf repräsentativer Feature-Matrix
- Ziel: Erzeugung des entsprechenden V'^T-Spaltenvektoren
- es gilt:

$$\begin{aligned} F &\approx U' * L' * V'^T \\ L'^{-1} * U'^{-1} * F &\approx V'^T \\ L'^{-1} * U'^T * F &\approx V'^T \end{aligned}$$

SVD - Transformation neuer Feature-Vektoren

- sei f_{*j} zu transformierender Feature-Vektor
- $v'_{*j} \in V'^T$ erzeugt durch Multiplikation mit Matrizen U'^T und L'^{-1}

$$v'_{*j} = L'^{-1} * U'^T * f_{*j}$$

SVD - Transformation neuer Feature-Vektoren

Beispiel

Transformation von

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu

$$v' = L'^{-1} * U'^{T} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0828 \\ -0{,}5326 \end{pmatrix}$$

SVD - Berechnung auf transformierten Vektoren

Ausnutzung von $F^T * F = V * L^2 * V^T$ zur Berechnung Skalarprodukt

- Kosinusmaß:

$$
\begin{aligned}
sim_{cos}(f_{*1}, f_{*2}) &= \frac{\langle f_{*1}, f_{*2} \rangle}{\sqrt{\langle f_{*1}, f_{*1} \rangle} * \sqrt{\langle f_{*2}, f_{*2} \rangle}} \\
&= \frac{f_{*1}^T * f_{*2}}{\sqrt{f_{*1}^T * f_{*1}} * \sqrt{f_{*2}^T * f_{*2}}} \\
&\approx \frac{v'_{*1} * L' * L' * v'^T_{*2}}{\sqrt{v'_{*1} * L' * L' * v'^T_{*1}} * \sqrt{v'_{*2} * L' * L' * v'^T_{*2}}}
\end{aligned}
$$

SVD - Berechnung auf transformierten Vektoren

Ausnutzung von $F^T * F = V * L^2 * V^T$ zur Berechnung Skalarprodukt

- euklidsche Distanz:

$$
\begin{aligned}
dissim_{L_2}(f_{*1}, f_{*2}) &= \sqrt{(f_{*1} - f_{*2})^T * (f_{*1} - f_{*2})} \\
&\approx \sqrt{(v'_{*1} - v'_{*2}) * L' * L' * (v'_{*1} - v'_{*2})^T}
\end{aligned}
$$