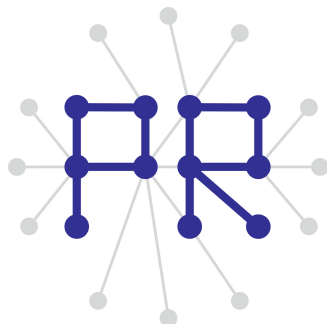
Einführung in die Informatik I

Kapitel II.3: Sortieren

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek[1]

Research Group for Pattern Recognition
www.pr.informatik.uni-siegen.de

Institute for Vision and Graphics
University of Siegen, Germany

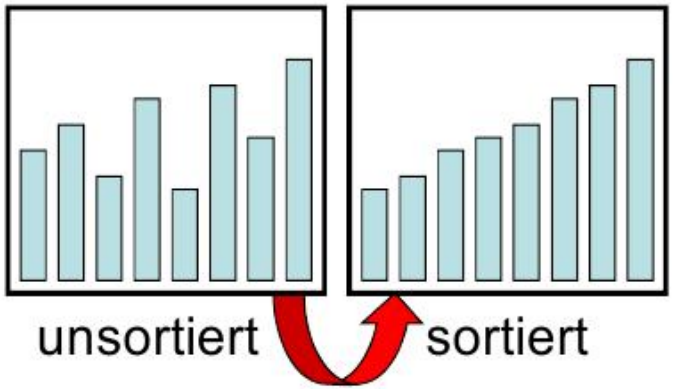


[1] Die im Rahmen dieser Lehrveranstaltung verwendeten Lernmaterialien wurden uns zum Großteil von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Wiechert und Herrn Prof. Dr. Roland Reichardt zur Verfügung gestellt.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis II

Sortieren

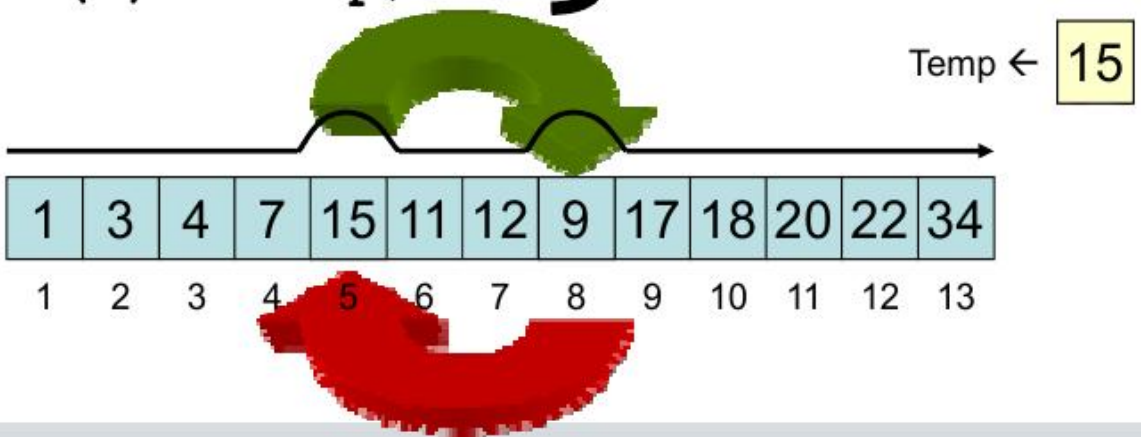


- Beim Sortieren wird ein Feld mit Elementen nach einem **Schlüssel** mit Hilfe eines **Sortierkriteriums** geordnet.
- Beispiel Telefonbuch:
  - **Schlüssel**: Nachname, Vorname
  - **Sortierkriterium**: Vorgänger < Nachfolger
- In der Vorlesung werden verschiedene Sortierverfahren für **Zahlen in einem Vektor** beschrieben, um sich auf algorithmische Fragen zu konzentrieren.

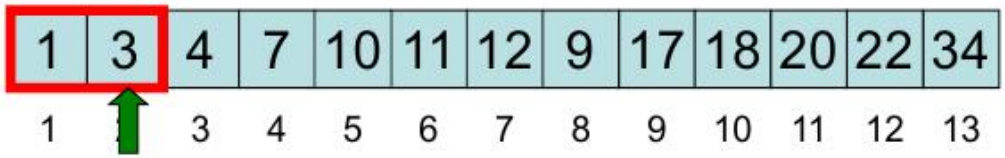
Vertauschen von Inhalten

- Grundlegende Funktion bei Sortierverfahren.
- Beispiel: „fast“ sortierte Zahlenfolge
  - 15 und 9 sind nicht in der richtigen Reihenfolge
  - Die Inhalte Speicherplätze 5 und 8 müssen getauscht werden.
    - `Temp = Feld(5);`
    - `Feld(5) = Feld(8);`
    - `Feld(8) = Temp;`

Tausch!

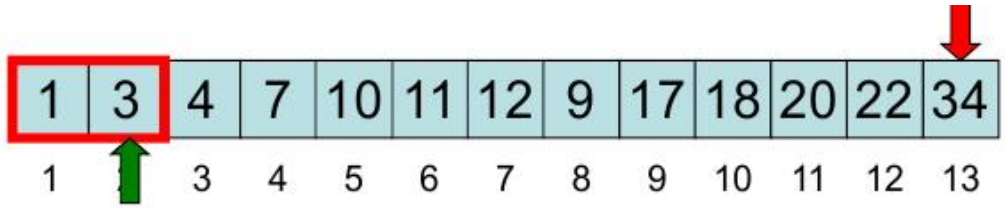


Bubble Sort (erste Version)



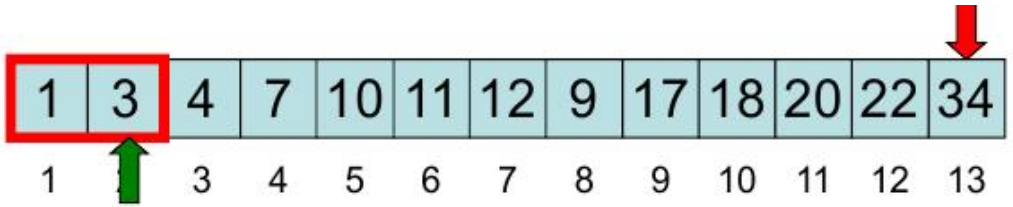
- Bubble Sort beruht auf dem wiederholten Durchlaufen aller Daten von links nach rechts (rotes Fenster). Stehen zwei Werte in falscher Reihenfolge, so werden sie getauscht.
- Dazu laufen zwei geschachtelte Schleifen über die Daten
  - Die erste Schleife ruft lediglich die zweite Scheife *n*-Mal auf (n = Anzahl der Elemente im Feld).
  - Die zweite Schleife (grüner Zeiger) läuft jeweils von Position 2 bis n. Das rote Fenster wird dabei über die Daten gezogen.
  - Im Fenster werden jeweils die linke und rechte Position verglichen.
  - Bei Fehlordnung Tauschen der beiden Werte im Fenster.
- Das kleinste Element wandert dabei pro Durchlauf um eine Position nach links. Dies muss maximal *n* Mal passieren, damit ein Element im Worst Case von ganz rechts nach ganz links wandern kann.

Quelltext: Bubble Sort (1)



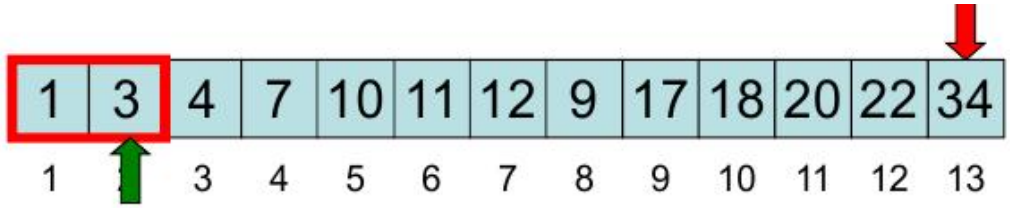

```
function x = bubble_sort(x)
n=length(x);              % Anzahl
for i = 1:n               % Durchlaufzähler
    for j =2:n            % Fenster-Durchlauf
        if x(j-1) > x(j)
            temp  =x(j-1); % Tauschen
            x(j-1)=x(j  ); % ...
            x(j  )=temp  ; % ...
        end
    end
end
```

Bubble Sort (zweite Version)



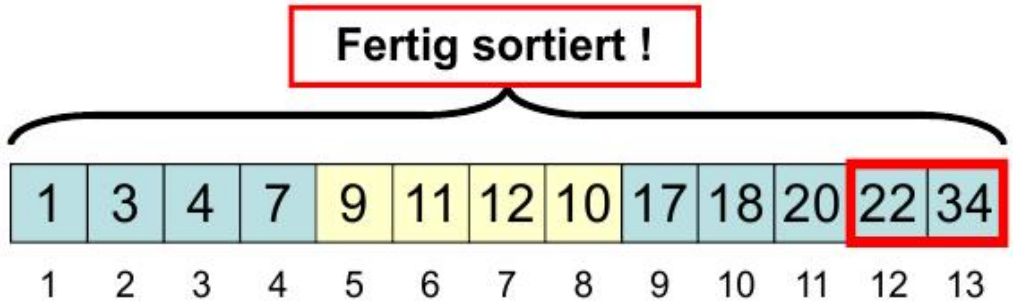
- Feststellung: Das größte Element steht nach dem ersten Durchlauf immer ganz rechts. Daher muss das Fenster beim zweiten Durchlauf nur noch bis n-1 gezogen werden. Beim i-ten Durchlauf nur noch bis Position n-i+1.
- Dies erklärt auch warum der Algorithmus funktioniert.
- Realisierung mit einem weiteren Zeiger (rot):
  - Das Ende des aktuellen Fenster-Durchlaufs wird durch den roten Zeiger vorgegeben.
  - Dieser läuft jetzt über die Werte n, n-1, n-2,…,2.

Quelltext: Bubble Sort (2)




```
function x = bubble_sort(x)
n=length(x);              % Anzahl
for i = n:-1:1            % von rechts nach links
    for j =2:i            % von links bis i
        if x(j-1) > x(j)
            temp  =x(j-1); % Tauschen
            x(j-1)=x(j  ); % ...
            x(j  )=temp  ; % ...
        end
    end
end
```

Bubble Sort (dritte Version)



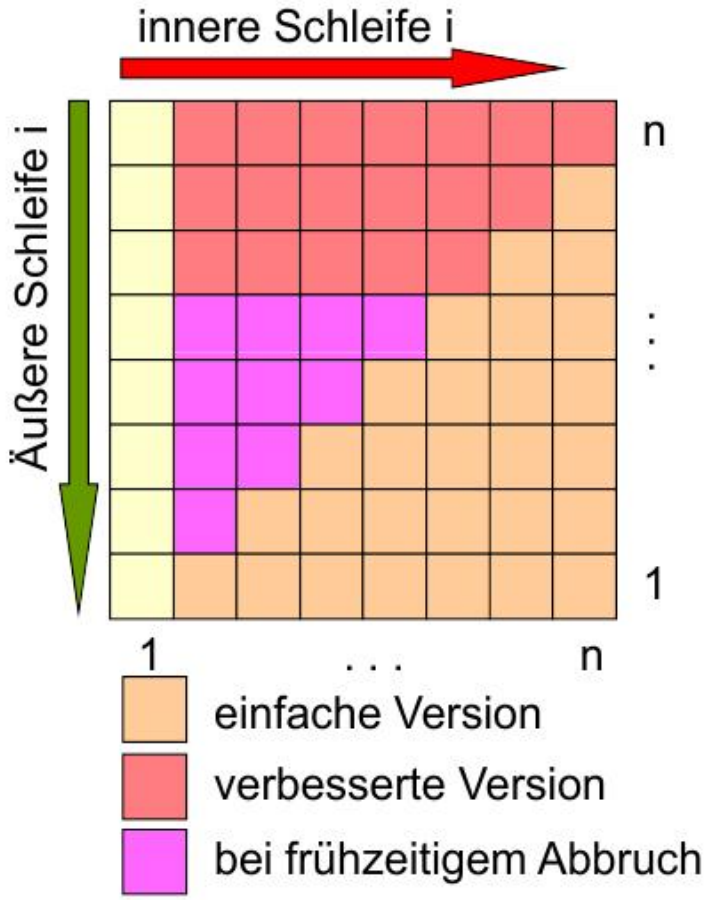
- Situation von eben:
  - „9“ ist von Position 8 nach 5 gewandert
  - zweiter Durchlauf.
- Diesmal nur bis Feld Nr. 2
- Wenn in einem Durchlauf **nicht getauscht** wurde, dann ist das Feld sortiert.
- Das Programm muss sich also **merken, ob getauscht wurde**, um die Sortierung abzubrechen.

Quelltext: Bubble Sort (3)

```
function x = bubble_sort(x)
n=length(x);            % Anzahl
for i = n:-1:1          % von rechts nach links
    getauscht = 0;      % Merker für Tausch
    for j =2:i          % von links bis i
        if x(j-1) > x(j)
            temp=x(j-1); % Tauschen
            x(j-1)=x(j); % ...
            x(j)=temp;   % ...
            getauscht=1; % Merker für Tausch
        end
    end
    if ~getauscht % Wenn nicht getauscht...
        break     % Sortierung beendet!
    end
end
```

Laufzeitanalyse: Bubble Sort

- Bubble Sort durchläuft zwei geschachtelte Schleifen



- Anzahl der Schleifendurchläufe
  - einfach

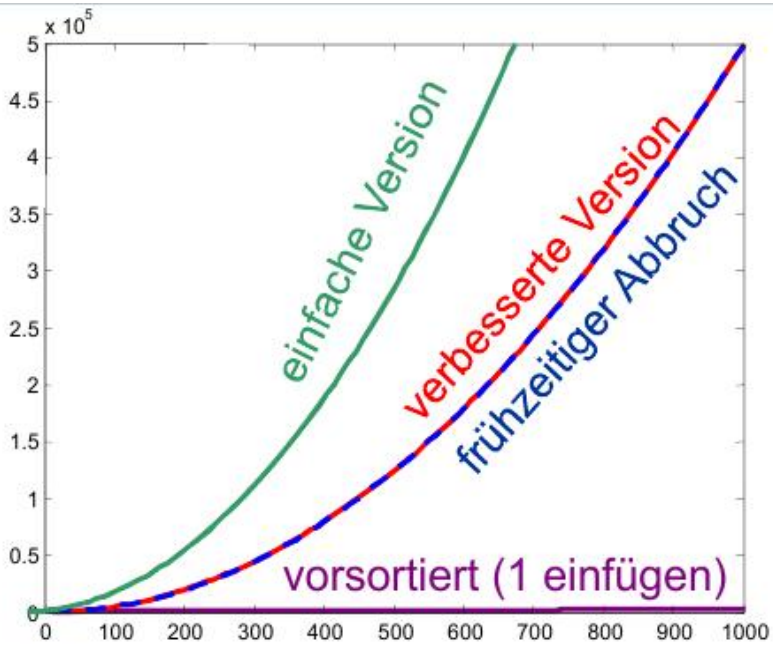
$$n \cdot (n-1) = n^2 + n \approx n^2$$

  - verbessert

$$(n-1)+(n-2)+\ldots 2+1 = 1/2 \cdot n \cdot (n-1) = 1/2 \cdot n^2 - 1/2 \cdot n \approx 1/2 \cdot n^2$$

  - mit Abbruch im worst case etwas besser, aber im Durchschnitt immer noch $\approx \frac{1}{2} n^2$

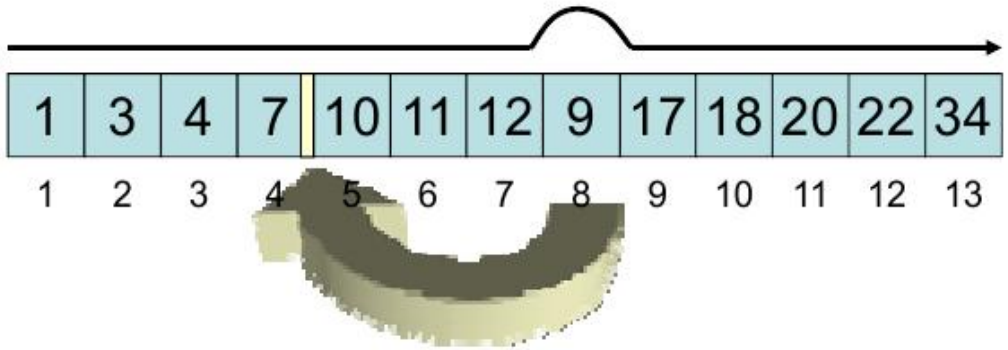
Empirische Laufzeitergebnisse



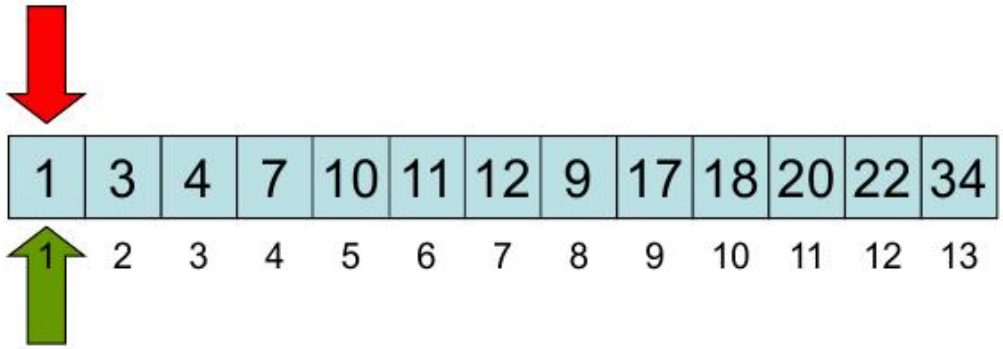
- Bei völlig unsortierten Listen wächst die Rechenzeit mit dem Quadrat der Listenlänge
- Doppelte Listenlänge bedeutet 4-fache Rechenzeit
  10-fache Listenlänge bedeutet 100-fache Rechenzeit
- Nur bei vorsortierten Listen ist der frühzeitige Abbruch von Vorteil

Insertion Sort

- Sortieren durch direktes Einfügen
- Kartenspieler sortiert seine Karten:
  - Betrachte ein Element nach dem anderen und füge jedes an die richtige Stelle zwischen den bereits betrachteten ein.
  - Einfügen, indem die größeren Elemente um eins nach rechts geschoben werden, während die Einfügeposition gesucht wird.

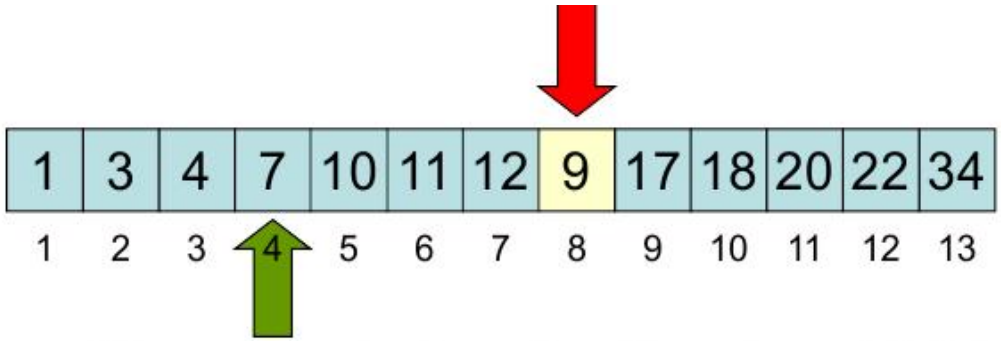


Insertion Sort



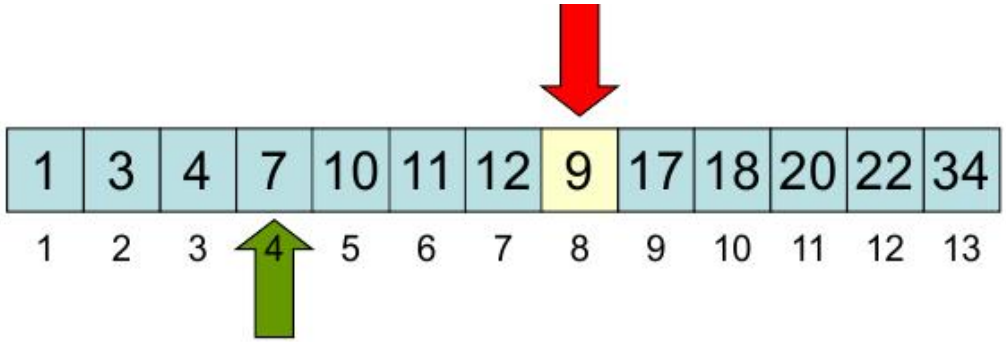
- Zwei Schleifen (Zeiger)
- Die erste Schleife schaut sich die Zahlen nacheinander an.
- Die zweite Schleife sucht **nach jedem Verschieben** des Zeigers der ersten Schleife eine Einfügeposition für die Zahl der ersten Schleife.

Insertion Sort (erste Version)



- Einfügen: „9“ muss zwischen Position 4 und 5 (also nach 4)
- *Mensch (Kartenspiel)*:
  - „9“ rausnehmen,
  - „10, 11, 12“ nach rechts schieben,
  - „9“ in die Lücke einfügen
- Ein Programm kann aus Feldern keine „rausnehmen“ und Felder haben auch keine „Lücken“ zum Einfügen.
- Einfache Lösung: Neuen Wert wie bei Bubble Sort von rechts nach links tauschen bis er an der richtigen Stelle steht.

Implementierung von Insertion Sort



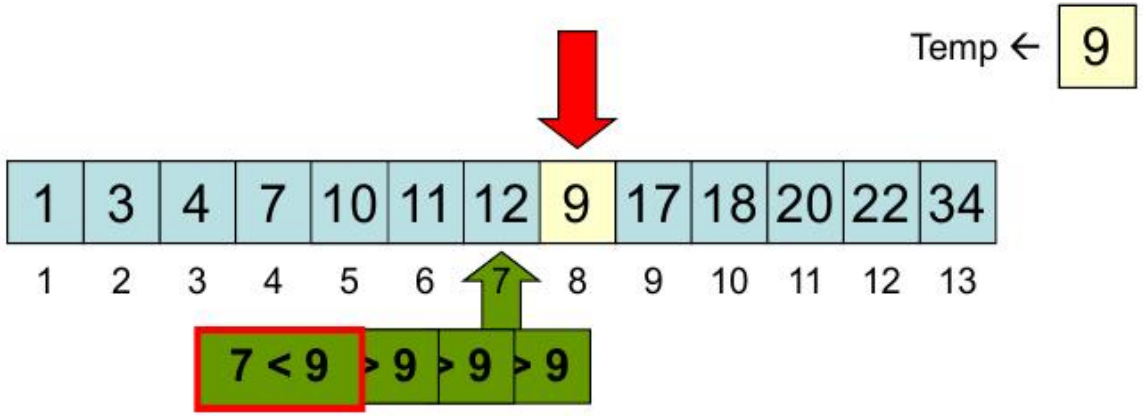
- Die Äußere Schleife braucht **nicht bei 1** loszulaufen, sondern **erst bei 2**, weil die innere Schleife sich immer um den Bereich links von der Äußeren kümmert.
- Äußere Schleife ist eine **for-Schleife**, weil die Schleifengrenzen von Anfang an fest stehen.
- Innere Schleife ist ein **while-Schleife**, weil diese abgebrochen werden kann, wenn die Einfügeposition gefunden wurde.
- Suchen der Einfügestelle und Verschieben der Elemente rechts davon erfolgt simultan in nur einer Schleife

Quelltext: Insertion Sort (1)

```
function x = insertion_sort_bubble(x)
n=length(x);

for i = 2:n
%    temp = x(i); % Zahl „merken“
  j=i; % zweite Schleife beginnt bei i
  while (j>1) && (x(j-1) > x(i))
      temp  =x(j-1); % Tauschen wie BUBBLE
      x(j-1)=x(i);   % ...
      x(i)  =temp;   % ...
      j=j-1;         % eine Position runter
  end
end
```

Insertion Sort (2)

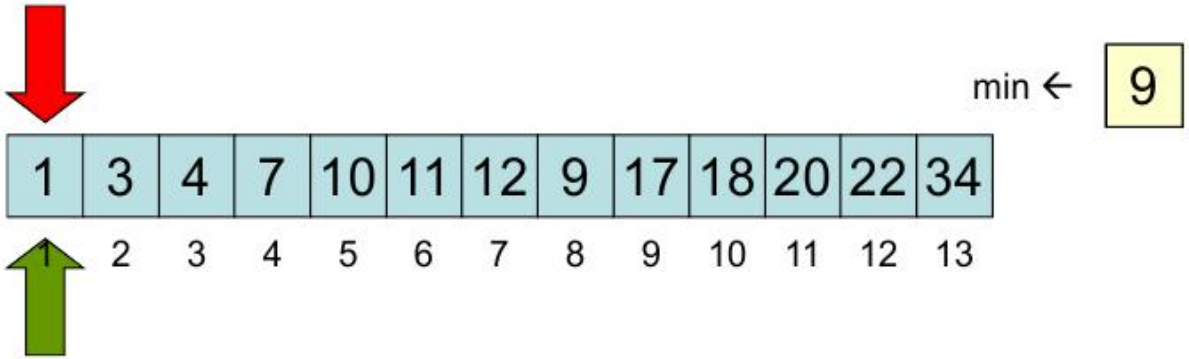


- Im Programm:
  - Zahl der ersten Schleife in temporärer Variable „merken“.
  - Zweite Schleife kopiert die Zahlen nach oben, so lange die aktuelle Zahl größer als die „gemerkte“ Zahl ist.
  - Temporärer Variable wird in letzte Position der zweiten Schleife kopiert.
- Die Verbesserung spart eine Reihe von Zuweisungen.

Quelltext: Insertion Sort (2)

```
function x = insertion_sort(x)
n=length(x);
for i = 2:n
  temp = x(i); % Zahl „merken“
  j=i; % zweite Schleife beginnt bei i
  while (j>1) & (x(j-1) > temp)
    x(j)=x(j-1); % hoch kopieren
    j=j-1;       % eine Position runter
  end
  x(j)=temp; % „gemerkte“ Zahl von i kopieren
end
```

Selection Sort



- Sortieren durch Auswahl sucht in jedem Schritt aus einem Stapel noch nicht sortierter Karten das kleinste Element. Dieses wird an die schon sortierten Werte angehängt.
- Zwei Schleifen (Zeiger)
- Die erste Schleife markiert eine Tauschposition am Ende des schon sortierten Teils (links nach rechts).
- Die zweite Schleife sucht **nach jedem Verschieben** des ersten Zeigers die **kleinste Zahl im Rest des Feldes**.
- Diese kleinste Zahl wird mit der Position der ersten Scheife getauscht.

Implementierung von Selection Sort

- Äußere Schleife muss **nicht bis ganz ans Ende** laufen, sondern **nur bis zum Vorletzen** Eintrag. Die innere Schleife kümmert sich immer um den Bereich rechts von der Äußeren.
- Äußere Schleife ist eine **for-Schleife**, weil die Schleifengrenzen von Anfang an fest stehen.
- Die Innere Schleife sucht das kleinste Element im noch nicht sortierten Teil des Vektors: Siehe Suchalgorithmen
- Innere Schleife ist auch eine **for-Schleife**, weil die Schleifengrenzen ebenfalls von Anfang an fest stehen.
- Links von der Äußeren Schleife ist alles sortiert. Die Innere Schleife braucht also nicht vorne zu beginnen.

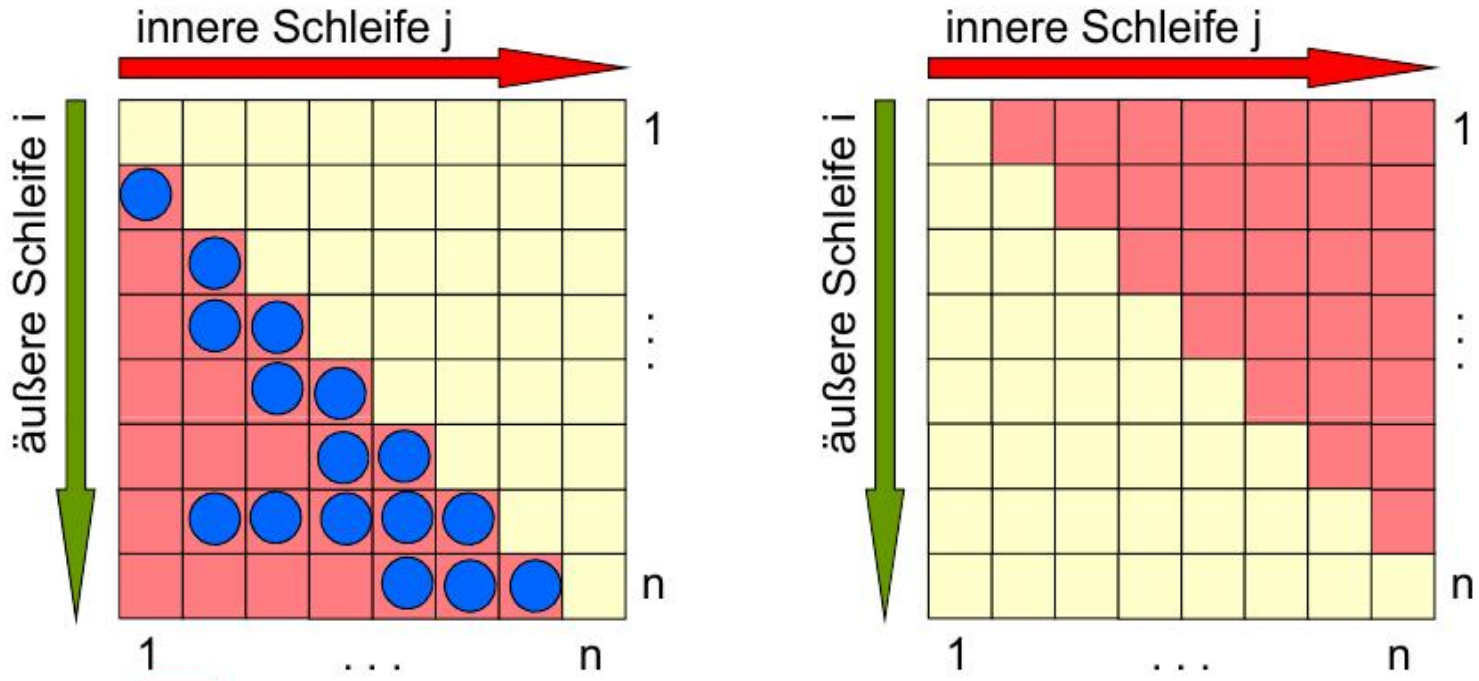
Quelltext: Selection Sort

```
function x = selection_sort(x)
n=length(x); % Anzahl

for i = 1:n-1                  % bis zum Vorletzten
   % Minimumssuche von i bis n
   min_i=i;                    % min initialisieren
   for j = i+1:n               % Beginn nach i
       if x(j) < x(min_i)      % kleiner als akt. min?
          min_i = j;           % neues min
       end
   end
   % Tauschen min <-> aktuelles i
   temp      = x(i);
   x(i)      = x(min_i);
   x(min_i) = temp;
end
```

Laufzeitanalyse: Insertion/Selection Sort

- Beide Algorithmen durchlaufen zwei geschachtelte Schleifen



worst case

$1/2 \cdot n^2 - 1/2 \cdot n \approx 1/2 \cdot n^2$

$1/2 \cdot n^2 - 1/2 \cdot n \approx 1/2 \cdot n^2$

Bei frühzeitigem Abbruch (Mittel)

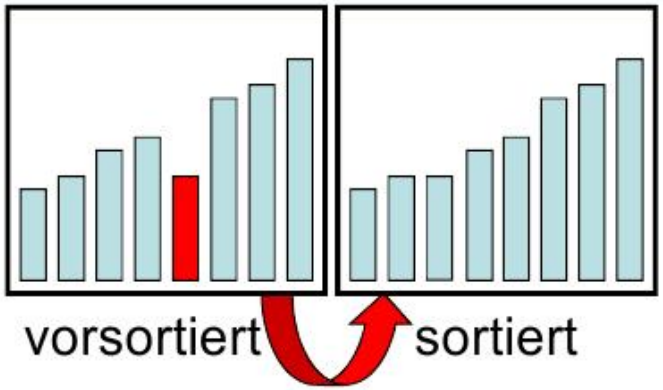
$1/4 \cdot n^2 - 1/4 \cdot n \approx 1/4 \cdot n^2$

Zusammenfassung: Sortieren

Verfahren	Bubble	Selection	Insertion
Durchschnittliche Laufzeit	$1/2 \cdot n^2$	$1/4 \cdot n^2$	$1/2 \cdot n^2$

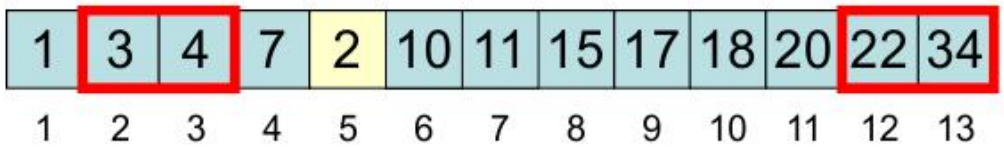
- Selection Sort schneidet am besten ab.
- In der Praxis ist dieser Vorteil marginal, weil eine quadratische Laufzeit bei großen Datenmengen inakzeptabel ist.

Sortieren vorsortierter Listen



- In eine vorsortierte Liste wurde ein neues Element ungeachtet des Sortierschlüssels eingefügt.
- Die Liste muss neu sortiert werden.
- ...

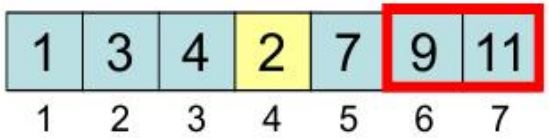
Bubble Sort (vorsortierte Liste)



- Es liegt die vorsortierte Liste vor, lediglich das 5. Element wurde neu, an der falschen Position eingefügt.
- Die erste Schleife (**rechts nach links**) vergleicht den Nachfolger und die aktuelle Position.
- Tauschen der Werte bei Bedarf.
- Das neue Element steht **nach dem ersten** Durchlauf auf jeden Fall auf der **richtigen Position**.
- Der Sortiervorgang nach einem Durchlauf fertig!

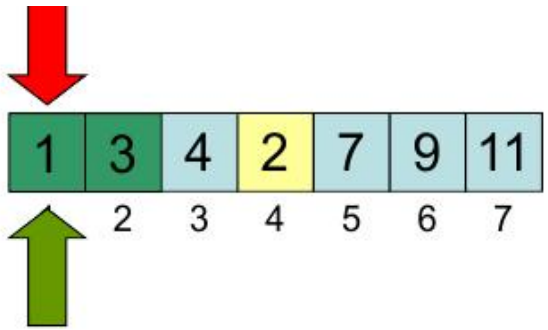
Sortieren vorsortierter Listen

Bubble Sort



- Die erste Schleife (**jetzt: rechts nach links**) vergleicht den Nachfolger und die aktuelle Position.
- Tauschen der Werte bei Bedarf.
- Das **neue** Element steht **nach dem ersten** Durchlauf auf jeden Fall auf der **richtigen Position**.
- Bei vorsortierten Listen ist der frühzeitige Abbruch von Vorteil.

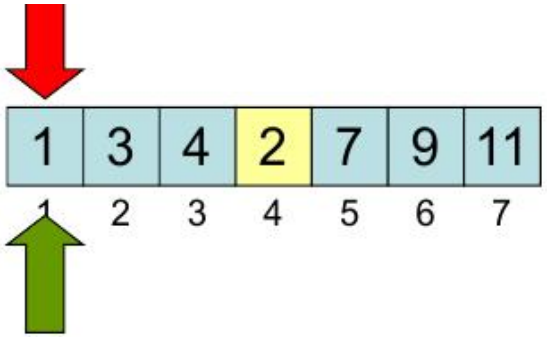
Sortieren vorsortierter Listen

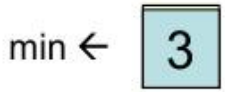


Insertion Sort

- Die erste Schleife schaut sich die Zahlen nacheinander an.
- Die zweite Schleife sucht **nach jedem Verschieben** des Zeigers der ersten Schleife eine Einfügeposition für die Zahl der ersten Schleife.
- Das neue Element wird einsortiert, nachdem die erste Schleife bis an dessen Einfügeposition (4) gelaufen ist.
- Die erste Schleife läuft dann weiter bis ans Ende der Liste weiter.

Sortieren vorsortierter Listen





Selection Sort

- Die erste Schleife dient als Tauschposition (links nach rechts).
- Die zweite Schleife sucht **nach jedem Verschieben** des ersten Zeigers die **kleinste Zahl im Rest des Feldes**.

Logistik: Hochregallager

- Sortieren betrifft nicht nur Dateien oder Datensätze, sondern kann auch wesentlich komplexer sein!
- In einem Hochregallager dauert der Zugriff auf die einzelnen Lagerplätze unterschiedlich lange.
- Um die Wartezeit zu verkürzen, werden häufig angefragte Artikel näher am Eingang/Ausgang einsortiert.
- Diese Art der Lagerhaltung heißt **chaotisch**